ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ----------------

VŨ THỊ THANH NGA

MỘT ĐỊNH LÝ HỘI TỤ MẠNH GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH VÀ BÀI TOÁN ĐIỂM BẤT ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
1. TS. Trương Minh Tuyên
2. TS. Li ZhenYang

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới những người thân trong gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, khích lệ, tạo điều kiện giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\cap$	phép giao
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\max M$	số lớn nhất trong tập hợp số M
$\min M$	số nhỏ nhất trong tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x\in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\operatorname{dom}(A)$	miền hữu hiệu của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$L^p(\Omega)$	không gian các hàm khả tích bậc p trên Ω
l^p	không gian các dãy số khả tổng bậc p
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J_p	ánh xạ đối ngẫu
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T

int$M$	phần trong của tập hợp M
err	sai số cho trước
P_C	phép mêtric lên C
proj_C^f	phép chiếu Bregman lên C
i_C	hàm chỉ của tập lồi C

Mở đầu

Cho C và Q là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của các không gian Hilbert H_1 và H_2, tương ứng. Cho $T: H_1 \longrightarrow H_2$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Bài toán chấp nhận tách (SFP) có dạng như sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in C \text{ sao cho } Tx^* \in Q. \tag{0.1}$$

Dạng tổng quát của Bài toán (0.1) là bài toán (0.2), bài toán này được phát biểu như sau: Cho C_i, $i = 1, 2, ..., N$ và Q_j, $j = 1, 2, ..., M$ là các tập con lồi và đóng của H_1 và H_2 tương ứng.

$$\text{Tìm một phần tử} \quad x^* \in S = \cap_{i=1}^{N} C_i \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^{M} Q_j) \neq \emptyset. \tag{0.2}$$

Mô hình bài toán (SFP) lần đầu tiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Y. Censor và T. Elfving [6] cho mô hình các bài toán ngược. Bài toán này đóng vai trò quan trọng trong khôi phục hình ảnh trong Y học, điều khiển cường độ xạ trị trong điều trị bệnh ung thư, khôi phục tín hiệu (xem [3], [4]) hay có thể áp dụng cho việc giải các bài toán cân bằng trong kinh tế, lý thuyết trò chơi.

Ta biết rằng $C = F(P_C)$–tập điểm bất động của phép chiếu mêtric từ H_1 lên C. Do đó, bài toán chấp nhận tách (0.1) là một trường hợp đặc biệt của bài toán điểm bất động tách. Dạng tổng quát của bài toán điểm bất động chung tách được phát biểu như sau: Cho $T_i: H_1 \longrightarrow H_1$, $i = 1, 2, ..., N$ và $S_j: H_2 \longrightarrow H_2$, $j = 1, 2, ..., M$ là các ánh xạ không giãn trên H_1 và H_2, tương ứng.

$$\text{Tìm phần tử} \quad x^* \in S = \cap_{i=1}^{N} Fix(T_i) \cap T^{-1}\big(\cap_{j=1}^{M} Fix(S_j)\big) \neq \emptyset. \tag{0.3}$$

Cho đến nay Bài toán (0.3) trong không gian Banach đã và đang là chủ đề thu hút nhiều người làm toán trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Gần đây, đã có một số tác giả đề cập đến việc nghiên cứu tìm các phương pháp lặp mới tìm một nghiệm chung của Bài toán (0.1) hay (0.3) và các lớp bài toán khác (bài toán cân bằng, bài toán điểm bất động, bất đẳng thức biến phân ...). Mục đích của luận văn này là trình bày lại các kết quả của Tuyen T.M. và Ha

N.S. trong tài liệu [17] phương pháp chiếu lai ghép tìm một nghiệm chung của Bài toán (0.2) và bài toán điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trái trong không gian Banach.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề về không gian Banach phản xạ, không gian p-lồi đều, trơn đều, ánh xạ đối ngẫu; khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman; bài toán chấp nhận tách và bài toán tìm điểm bất động của toán tử Bregman không giãn mạnh trái.

Chương 2. Một định lý hội tụ mạnh giải bài toán chấp nhận tách và bài toán điểm bất động trong không gian Banach

Trong chương này luận văn tập trung trình bày lại một cách chi tiết các kết quả của Tuyen T.M. và Ha N.S. trong tài liệu [17] về phương pháp chiếu lai ghép tìm một nghiệm chung của bài toán chấp nhận tách và bài toán điểm bất động của toán tử Bregman không giãn mạnh trái trong không gian Banach p-lồi đều và trơn đều.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm 4 mục. Mục 1.1 trình bày về một số tính chất cơ bản của không gian phản xạ, không gian Banach lồi đều, trơn đều. Mục 1.2 giới thiệu về ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Mục 1.3 đề cập đến các khái niệm phép chiếu mêtric và phép chiếu tổng quát cùng với một số tính chất cơ bản của chúng. Mục 1.4 trình bày về toán tử đơn điệu trong không gian Banach, toán tử giải tổng quát và toán tử giải mêtric. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [2, 11, 12].

1.1 Không gian Banach p-lồi đều và không gian Banach trơn đều

1.1.1 Không gian Banach phản xạ

Cho X là một không gian tuyến tính định chuẩn và X^* là không gian đối ngẫu của nó. Để cho đơn giản và thuận tiện hơn, chúng tôi thống nhất sử dụng kí hiệu $\|.\|$ để chỉ chuẩn trên X và X^*; giá trị của phiếm hàm tuyến tính $x^* \in X^*$ tại điểm $x \in X$ được ký hiệu là $\langle x, x^* \rangle$.

Định nghĩa 1.1.1. Không gian Banach E được gọi là phản xạ nếu với mọi $x^{**} \in E^{**}$, tồn tại $x \in E$ sao cho

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle,$$

với mọi $x^* \in E^*$.

Ví dụ 1.1.2. Mọi không gian tuyến tính định chuẩn hữu hạn chiều, các không gian l^p hay $L^p(\Omega)$, với $1 < p < \infty$, là các không gian phản xạ (xem [2]).

Chú ý 1.1.3. Các tính chất dưới đây về không gian Banach phản xạ có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo [2].

i) Nếu không gian Banach X đồng phôi tuyến tính với không gian phản xạ Y, thì X cũng là không gian phản xạ.

ii) Mọi không gian con đóng của không gian phản xạ là không gian phản xạ;

iii) Không gian Banach E là phản xạ khi và chỉ không gian liên hợp E^* của nó là không gian phản xạ.

1.1.2 Sự hội tụ yếu trong không gian Banach

Định nghĩa 1.1.4. Dãy $\{x_n\}$ trong không gian tuyến tính định chuẩn E được gọi là hội tụ yếu về một phần tử $x \in E$ và được ký hiệu là $x_n \rightharpoonup x$, nếu

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle,$$

với mọi $x^* \in X^*$.

Nhận xét 1.1.5. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x, tức là $\|x_n - x\| \to 0$, thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x. Tuy nhiên, điều ngược lại không đúng. Chẳng hạn, xét không gian Hilbert l^2, dãy $\{e_n\}$ xác định bởi

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{\text{vị trí thứ } n}{1}, 0, \dots),$$

với mọi $n \geq 1$, hội tụ yếu về không (xem [2]), nhưng không hội tụ mạnh về không (vì $\|e_n\| = 1$ với mọi $n \geq 1$).

Mệnh đề 1.1.6. *Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn, dãy $\{x_n\} \subset E$ hội tụ yếu về $x \in E$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ bị chặn.*

Chứng minh. Với mỗi $n \geq 1$, xét dãy phiếm hàm $\{\mathcal{H}_{x_n}\} \subset E^{**}$ xác định bởi $\langle x^*, \mathcal{H}_{x_n} \rangle = \langle x_n, x^* \rangle$ với mọi $x^* \in E^*$. Khi đó, với mỗi $x^* \in E^*$, ta có

$$\langle x^*, \mathcal{H}_{x_n} \rangle = \langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle.$$

Do đó, theo hệ quả của nguyên lý giới nội đều Banach-Stenhaux[1], ta có

$$\sup_n \|x_n\| = \sup_n \|\mathcal{H}_{x_n}\| < \infty.$$

[1]Cho X là không gian Banach, Y là không gian tuyến tính định chuẩn và $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Nếu với mỗi $x \in X$, dãy $\{A_n x\}$ hội tụ trong Y, thì $\sup_n \|A_n\| < \infty$.

Mệnh đề được chứng minh. $\square$

Mệnh đề 1.1.7. *Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn, $A \subset E$ là một tập compact tương đối và $\{x_n\} \subset A$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$. Khi đó, $x_n \to x$.*

Chứng minh. Giả sử $x_n \nrightarrow x$, khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và một dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho

$$\|x_{n_k} - x\| \geq \varepsilon, \tag{1.1}$$

với mọi $k \geq 1$.

Vì $\{x_{n_k}\} \subset A$ và A là tập compact tương đối, nên tồn tại dãy con $\{x_{n_{k_l}}\} \subset \{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_{k_l}} \to y$. Vì sự hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu nên $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup y$ và do đó $y = x$. Trong bất đẳng thức (1.1), thay x_{n_k} bởi $x_{n_{k_l}}$ ta được

$$\|x_{n_{k_l}} - y\| \geq \varepsilon,$$

mâu thuẫn với $x_{n_{k_l}} \rightharpoonup y$.
Vậy $x_n \to x$. $\square$

Trong luận văn này, chúng tôi thường xuyên sử dụng tính chất dưới đây của không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.1.8. (xem [2] trang 41) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *E là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong E, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tập đóng và tập đóng yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn.

Mệnh đề 1.1.9. *Nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian không gian tuyến tính định chuẩn X, thì C là tập đóng yếu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$, nhưng $x \notin C$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $x^* \in X^*$ tách ngặt x và C, tức là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$